

Homework 7 MATH 2510 Spring 2020

p.162 | B2 | Prove $M \vee (N \rightarrow M) \therefore \neg M \rightarrow \neg N$

Proof:	1	$M \vee (N \rightarrow M)$	
	2	$\neg M$	
	3	$N \rightarrow M$	DS 1,2
	4	$\neg N$	MT 2,3
	5	$\neg M \rightarrow \neg N$	$\rightarrow I$ 2-4

B4 | $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z), \neg(X \wedge D), D \vee M \therefore M$

Proof:	1	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	
	2	$\neg(X \wedge D)$	
	3	$D \vee M$	
	4	$\neg X \vee \neg D$	DeM 3
	5	$X \wedge Y$	
	6	X	$\wedge E$ 5
	7	$\neg D$	DS 4,6
	8	M	DS 3,7
	9	$X \wedge Z$	
	10	X	$\wedge E$ 9
	11	$\neg D$	DS 4,10
	12	M	DS 3,11
	13	M	$\vee E$ 1,5-8,9-12

p.165 | A2 | Prove $N \vee \neg N$ is a tautology.

Proof:

1		<u>N</u>	
2		$N \vee \neg N$	$\vee I 1$
3		<u>$\neg N$</u>	
4		$N \vee \neg N$	$\vee I 3$
5		$N \vee \neg N$	LEM 1-2, 3-4

A4 | Show $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ is a theorem

Proof:

1		<u>$(A \rightarrow B) \rightarrow A$</u>	
2		<u>$\neg A$</u>	
3		$\neg(A \rightarrow B)$	MT 1,2
4		<u>A</u>	
5		$\perp$	$\neg E 2,4$
6		B	X 5
7		$A \rightarrow B$	$\rightarrow I 4-6$
8		$\perp$	$\neg E 3,7$
9		A	$\perp P 2-8$
10		$[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$	$\rightarrow I 1-9$

B2) Prove $M \wedge (\neg N \rightarrow \neg M) \vdash (N \wedge M) \vee \neg M$

Proof :

1	$M \wedge (\neg N \rightarrow \neg M)$	
2	M	$\wedge E$ 1
3	$\neg N \rightarrow \neg M$	$\wedge E$ 1
4	$\neg M$	
5	$\perp$	$\neg E$ 4, 2
6	$\neg \neg M$	$\neg I$ 4-5
7	$\neg \neg N$	MT 3, 6
8	N	DNE 7
9	$N \wedge M$	$\wedge I$ 8, 2
10	$(N \wedge M) \vee \neg M$	$\vee I$ 9

C3) Show $T \rightarrow S$ and $\neg S \rightarrow \neg T$ are provably equivalent.

Proof :

1	$T \rightarrow S$	
2	$\neg S$	
3	$\neg T$	MT 1, 2
	$\neg S \rightarrow \neg T$	$\rightarrow I$ 2-3

1	$\neg S \rightarrow \neg T$	
2	T	
3	$\neg T$	
4	$\perp$	$\neg E$ 3, 2
5	$\neg \neg T$	$\neg I$ 3-4
6	$\neg \neg S$	MT 1, 5
7	S	DNE 6
8	$T \rightarrow S$	$\rightarrow I$ 2-7