

HW4 MATH 2510 Spring 2019

- ①
- 1 (1)  $\neg A \rightarrow (C \wedge D)$  Premise
  - 2 (2)  $A \rightarrow B$  Premise
  - 3 (3)  $\neg B$  Premise
  - 2 (4)  $\neg B \rightarrow \neg A$  contrapos 2
  - 2,3 (5)  $\neg A$   $\rightarrow$ -elim 3,4
  - 1,2,3 (6)  $C \wedge D$   $\rightarrow$ -elim 1,5
  - 1,2,3 (7)  $C$   $\wedge$ -elim 6

- ②
- 1 (1)  $P \wedge Q$  Premise
  - 2 (2)  $P \rightarrow \neg(Q \wedge R)$  "
  - 3 (3)  $S \rightarrow R$  "
  - 1 (4)  $P$   $\wedge$ -elim 1
  - 1,2 (5)  $\neg(Q \wedge R)$   $\rightarrow$ -elim 2,4
  - 1,2 (6)  $\neg Q \vee \neg R$  DeMorgan 5
  - 1 (7)  $Q$   $\wedge$ -elim 1
  - 1,2 (8)  $\neg R$  m.t.t. 6,7
  - 3 (9)  $\neg R \rightarrow \neg S$  contrapos 3
  - 1,2,3 (10)  $\neg S$   $\rightarrow$ -elim 8,9

- ③
- 1 (1)  $\neg(A \vee B) \rightarrow C$  Premise
  - 2 (2)  $\neg A$  "
  - 3 (3)  $\neg C$  "
  - 1 (4)  $\neg C \rightarrow \neg(\neg(A \vee B))$  contrapos 1
  - 1,3 (5)  $\neg\neg(A \vee B)$   $\rightarrow$ -elim 3,4
  - 1,3 (6)  $A \vee B$  dbl neg. 5
  - 1,2,3 (7)  $B$  m.t.t. 2,6

4)

1	(1) $P \rightarrow R$	Premise
2	(2) $P \rightarrow (R \rightarrow Q)$	Premise
3	(3) $P$	Premise (for cond pf)
1,3	(4) $R$	$\rightarrow$ -elim 1,3
2,3	(5) $R \rightarrow Q$	$\rightarrow$ -elim 2,3
1,2,3	(6) $Q$	$\rightarrow$ -elim 4,5
1,2	(7) $P \rightarrow Q$	Conditional pf. 3,6

5)

1	(1) $\neg S \wedge C$	Premise
2	(2) $W \rightarrow S$	"
3	(3) $\neg W \rightarrow T$	"
4	(4) $T \rightarrow H$	"
2	(5) $\neg S \rightarrow \neg W$	Contrapos 2
1	(6) $\neg S$	$\wedge$ -elim 1
1,2	(7) $\neg W$	$\rightarrow$ -elim 5,6
1,2,3	(8) $T$	$\rightarrow$ -elim 3,7
1,2,3,4	(9) $H$	$\rightarrow$ -elim 4,8

6)

1	(1) $G \rightarrow \neg G$	Premise
2	(2) $A \rightarrow B$	"
3	(3) $H \rightarrow D$	"
4	(4) $G \vee H$	"
5	(5) $B \leftrightarrow C$	"
6	(6) $A$	Premise (for c.i.p.)
2,6	(7) $B$	$\rightarrow$ -elim on 2,6
5	(8) $B \rightarrow C$	biconditional 5
2,5,6	(9) $C$	$\rightarrow$ -elim 7,8
1,2,5,6	(10) $\neg G$	$\rightarrow$ -elim 1,9
1,2,4,5,6	(11) $H$	mitit. 4,10
1,2,3,4,5,6	(12) $D$	3,11 ( $\rightarrow$ -elim)

$\forall 1,2,3,4,5$  (13)  $A \rightarrow D$   
 conditional proof

(7)

1	(1) D	( $\exists$ M Premise) $\times$ V (a) (a)
2	(2) $A \rightarrow B$	( $\rightarrow$ II $\wedge$ (a)) $\times$ E (a)
3	(3) $E \rightarrow C$	( $\rightarrow$ II $\wedge$ (a)) $\times$ E (a)
4	(4) $\neg A \rightarrow (D \rightarrow E)$	( $\rightarrow$ II $\wedge$ (a)) $\times$ E (a)
5	(5) $(B \vee C) \rightarrow F$	( $\rightarrow$ II $\wedge$ (a)) $\times$ E (a)
6	(6) $\neg F$	Premise (For contradiction)
5	(7) $\neg F \rightarrow \neg(B \vee C)$	Contrapos 5
5,6	(8) $\neg(B \vee C)$	$\rightarrow$ -elim 6,7
5,6	(9) $\neg B \wedge \neg C$	De Morgan 8
5,6	(10) $\neg B$	$\wedge$ -elim 9
2	(11) $\neg B \rightarrow \neg A$	Contrapos 2
2,5,6	(12) $\neg A$	$\rightarrow$ -elim 10,11
2,4,5,6	(13) $D \rightarrow E$	$\rightarrow$ -elim 4,12
1,2,4,5,6	(14) E	$\rightarrow$ -elim 1,13
1,2,3,4,5,6	(15) C	$\rightarrow$ -elim 3,14
1,2,3,4,5,6	(16) $B \vee C$	$\vee$ -introduction 15
1,2,3,4,5,6	(17) F	$\rightarrow$ -elimination 5,16
1,2,3,4,5,6	(18) $F \wedge \neg F$	$\wedge$ -introduction 6,17
1,2,3,4,5	(19) F	Proof by contradiction 6,18

- 9) a)  $\forall x (D(x) \rightarrow M(x))$   
 b)  $\exists x (P(x) \wedge \theta(x))$   
 c)  $\forall x (R(x) \rightarrow \neg D(x))$   
 d)  $\exists x (I(x) \wedge \neg E(x))$   
 e)  $\exists x (M(x) \wedge \neg S(x))$   
 f)  $\exists x (T(x) \wedge M(x))$   
 g)  $\forall x ((D(x) \wedge A(x)) \rightarrow (O(x) \vee T(x) \vee F(x)))$

- 5) 1.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$   
 2.  $A(c) \wedge B(c)$   
 3.  $A(c)$   
 4.  $B(c)$   
 5.  $\exists x A(x)$   
 6.  $\exists x B(x)$   
 7.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$   
 8.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$   
 9.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$   
 10.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$   
 11.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$   
 12.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$   
 13.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$   
 14.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$   
 15.  $\exists x (A(x) \wedge B(x))$

- 6) 1.  $A \rightarrow B$   
 2.  $A \rightarrow B$   
 3.  $A \rightarrow B$   
 4.  $A \rightarrow B$   
 5.  $A \rightarrow B$   
 6. (6) A Premise (for 5.9.)  
 7. B  $\rightarrow$ -elim 2,6  
 8.  $B \rightarrow C$  conditional 5  
 9. C  $\rightarrow$ -elim 7,8  
 10.  $A \rightarrow C$   $\rightarrow$ -elim 1,9  
 11.  $A \rightarrow C$  m.b.s. 4,10  
 12.  $A \rightarrow C$   $\rightarrow$ -elim 1,11